فصل دوم:

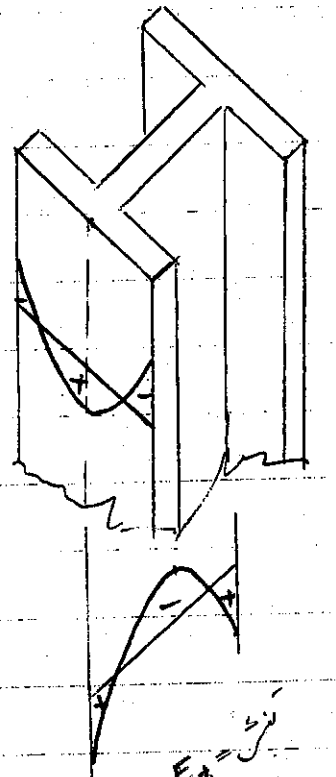
اثر تنش پسماند در کمانش ستونها

Residual stresses

اثر تنش پس ماند در کمانش ستونها -

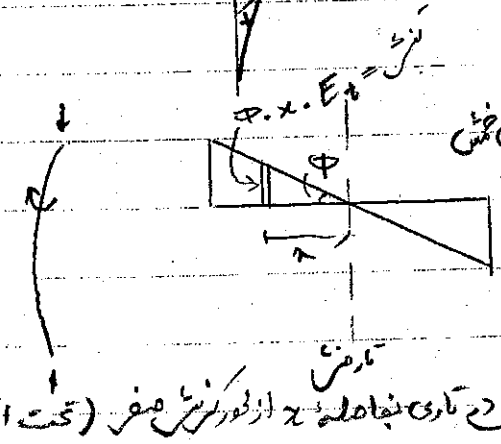
- تنش پس ماند به تنشهای اطلاق میگردد که پس از آنکه قطعه ای به شکل نهایی خود درآمد در قطعه باقی بماند . در نیمرخهای فولادی عمدتاً در اثر خنک شدن غیر یکنواخت نیمرخهای فولادی پس از نورد تنش پس ماند تشکیل میشود.

در اینصورت تعدیع آن بصورت زیر خواهد بود.



در قسمتهای محدب که تا خیر در خنک شدن خواهد داشت کشش و در قسمتهای مقعر جبران هوا که ابتدا خنک میشوند تنش رایار خواهد شد.

واضح است که عملکرد چنین نیمرخ قبل از نیروی تنش دهنده نیمرخ بدون تنش نخواهد بود.



برای تعادل در قطعه x از تار خنثی مقدار تنش خواهد شد :

نقطه ابتدای خمش $\Phi = 1/R$ شعاع انحناء

ε_t (کرنش) $= E\, x/R$

$dM = ($نیروی فشر$)($سطح مقطع$)($تنش$) = $

$= E_t \frac{x}{R} (dA)\, x$

تنش در تاری بفاصله x از لبه کرنش صفر (تحت اثر خمش)

$$\rightsquigarrow M = \frac{1}{R} \int_A E_t x^2 dA \qquad \therefore \frac{1}{R} = \frac{M}{\int E_t x^2 dA} = \frac{M}{E'I}$$

$$E'I = M R = \int_A E_t x^2 dA \quad \rightsquigarrow \quad E' = \frac{1}{I}\int_A E_t x^2 dA$$

effective modulus

در مقطعی ایده‌آل الاستو-پلاستیک:
مقدار E_t در قسمت ارتجاعی: $(E_t = E)$
مقدار E_t در قسمت غیرارتجاعی: $(E_t = 0)$
پس خواهیم داشت:

$$* \rightarrow E' = \frac{E}{I}\int_A x^2 dA = E(I_e/I)$$

(I_e: ممان اینرسی قسمت ارتجاعی) A (ارتجاعی)

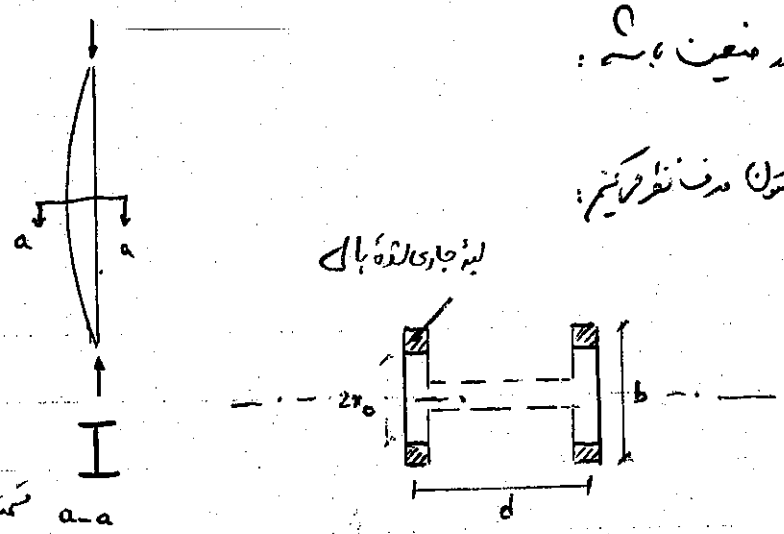
داریم $I_e = \int_A x^2 dA$ (ارتجاعی)

*یعنی قسمتی از مقطع که جاری شده مقطع صفر بوده لذا استحکام کمانش ستون، برابر با استحکام ستونی است که همان اینرسی مقطع آن همان اینرسی قسمت ارتجاعی مانده سطح مقطع است. لذا *

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E (I_e/I)}{(kl/r)^2}$$

الف- اگر کمانش پیرامون محور متقارن باشد:

۱- اگر تیر جان پیرامون در راستای ستون مدنظر کمانش کند:



قسمت ارتجاعی مانده بال

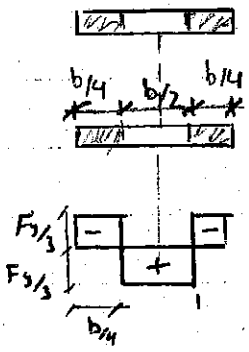
$$k = \frac{2x_0}{b} = A_e/A \quad , \quad E' = E I_e/I = E\frac{t_f (2x_0)^3}{t_f b^3} = E k^3$$

با قرار دادن این رابطه در تنش بحرانی، مقدار تنش بحرانی محاسبه خواهد شد.

تعیین مقاومت ستون

مثال - توزیع تنش پس‌ماند به صورت مستطیلی

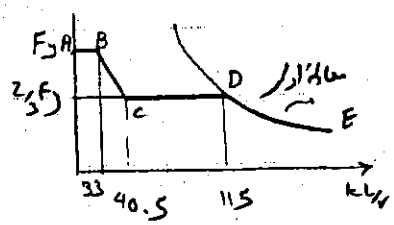
بررسی کمانش حول محور (x-x) الف- تنش بحرانی حد کمانش ارتجاعی و الاغری مربوطه (تابع DE)



$$F_{cr} \leq F_y - \frac{1}{3}F_y = \frac{2}{3}F_y$$

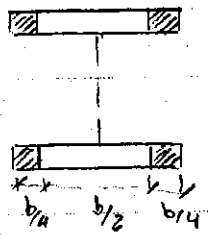
در این حالت کل مقطع ارتجاعی است

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} \leq \frac{2}{3}F_y \quad \rightsquigarrow \quad kl/r \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\frac{2}{3}F_y}} = 115$$



ب - تنش بحرانی در کمانش غیرارتجاعی و لاغری مربوطه (ناحیه BC):

اگر $F_{cr} \geq \frac{2}{3}F_y$



$$K = \frac{2x_0}{b} = \frac{b/2}{b} = 1/2$$

$$E' = E\,I_e/I = EK^3 = E/8$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{8(kl/r)^2} \geq \frac{2}{3}F_y \quad \rightsquigarrow \quad kl/r \leq 40.5$$

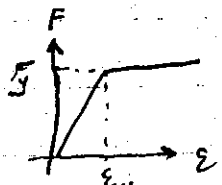
ج - حداکثر تنش بحرانی و لاغری مربوطه (ناحیه AB):

اگر $F_{cr} = F_y$:

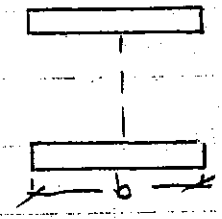
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{8(kl/r)^2} = F_y \quad \rightsquigarrow \quad kl/r = 33$$

تدریس فنی مقاومت مصالح

مثال - ۲ تنش مجاز محور (y-y) (تیر با تنش تسلیم غیرخطی)



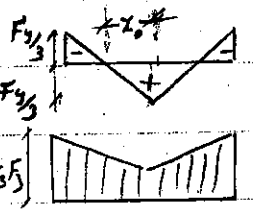
دیاگرام تنش - کرنش



الف - تنش بحرانی کمانش ارتجاعی و لاغری مربوطه (ناحیه BC):

$$F_{cr} < F_y - \frac{1}{3}F_y = \frac{2}{3}F_y$$

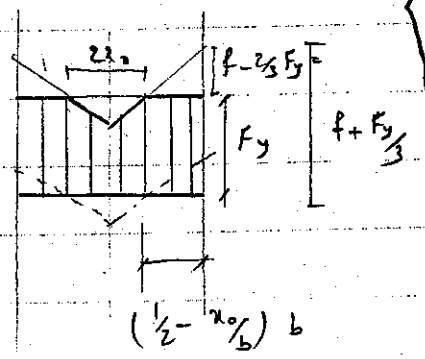
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} \leq \frac{2}{3}F_y \quad \rightsquigarrow \quad kl/r \geq 115$$



ب - تنش بحرانی کمانش غیرارتجاعی و لاغری مربوطه (ناحیه AB):

$f = P/A > \frac{2}{3}F_y$ تنش در ستون

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E\,(I_e/I)}{(kl/r)^2}$$ در این حالت



$$\begin{cases} I_e/I = \dfrac{2(\frac{1}{12})(2x_0)^3 t}{2(\frac{1}{12})b^3 t} = \dfrac{8x_0^3}{b^3} \\ F_{cr} = \dfrac{8\pi^2 E (x_0/b)^3}{(kL/r)^2} \end{cases}$$

F_{cr} تابعی از λ و $\frac{x_0}{b}$ است، لذا رابطه دیگری هم لازم است:

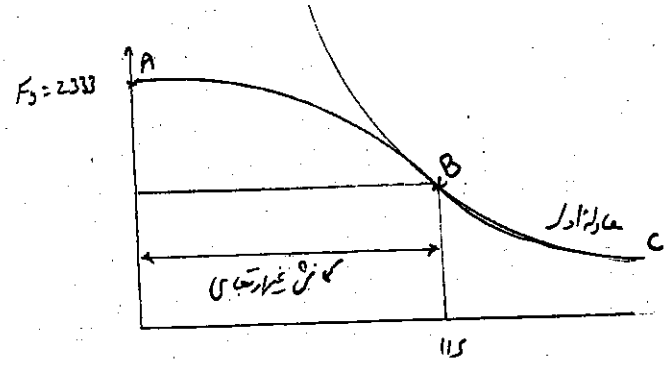
برای (سطح تنش) f: $P_{cr} = 2\left[fbt - 2(\frac{1}{2})(f - \frac{2}{3}F_y)(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{b})bt\right]$

از تشابه دو مثلث $\rightarrow$ $\dfrac{f - \frac{2}{3}F_y}{(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{b})b} = \dfrac{\frac{2}{3}F_y}{b/2} \rightarrow f = \left[1 - x_0/b\right]^4 F_y/3$

$$P_{cr} = 2bt\left\{(1-x_0/b)^{4F_y/3} - \left[(1-x_0/b)^{4F_y/3} - {}^{2F_y}/_3\right](1-x_0/b)\right\} = A_g F_y\left[1 - 4/3\left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]$$

$$F_{cr} = \frac{P_{cr}}{A_g} = F_y\left[1 - 4/3\left(\frac{x_0}{b}\right)^2\right]$$

x_0/b	F_{cr}	kL/r
.5	1555	113
.4	1836	74
.3	2053	46
.2	2210	24



۲- از تأثیر تیرجان نیز در بدست آوردن مدول تنگنش صرف نظر کنیم،

$$E_t = \frac{\text{افزایش تنش اعمالی}}{\text{افزایش کرنش ارتجاعی}}$$

$$E_t = \frac{dP/A}{\frac{dP}{A_e E}} = \frac{A_e E}{A} = \frac{E(A_w + 2kA_f)}{A}$$

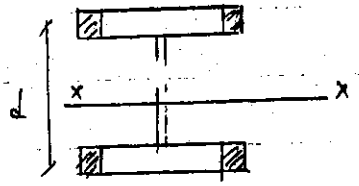
$$k = \frac{2x_0}{b} \rightarrow k = \frac{E_t A}{2EA_f} - \frac{A_w}{2A_f}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E'}{(kL/r)^2} = \frac{\pi^2 E k^3}{(kL/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{(kL/r)^2}\left(\frac{E_c A}{2A_f E} - \frac{A_w}{2A_f}\right)^3$$

ب- اگر کانرل حول محور قوی متقارن باشد.

۱- اثر تأثیر جان در پایداری ستون صرف نظر می‌کنیم:

$$E\frac{I_c}{I} = E\frac{2A_c(d/2)^2}{2A_f(d/2)^2} = Ek$$

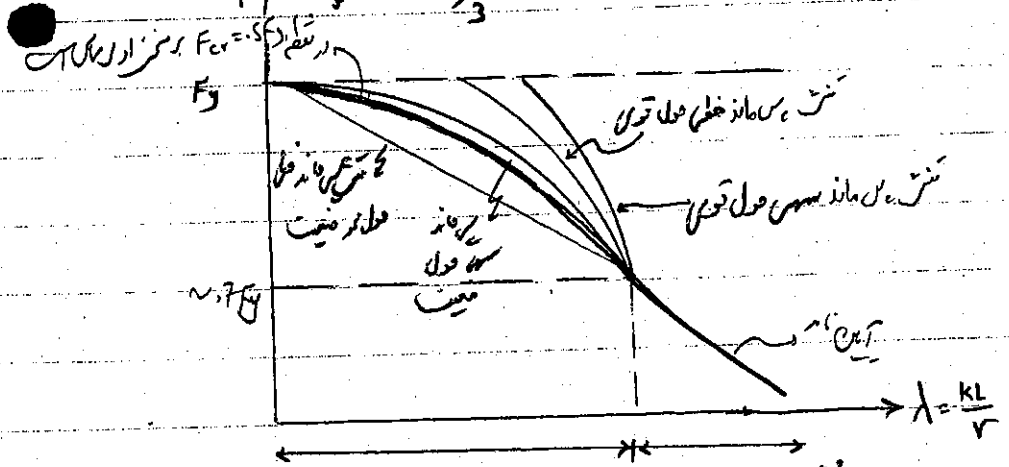


۲- اگر اثر تأثیر جان در پایداری ستون صرف نظر کنیم:

$$E I_c/I = E\left[\frac{2kA_f(d^2/4) + t_w d^3/12}{2A_f(d^2/4) + t_w d^3/12}\right]$$

$$= E\left(\frac{2kA_f + A_w/3}{2A_f + A_w/3}\right) \qquad \text{و} \quad 2kA_f = \frac{E_c A}{E} - A_w$$

$$E' = E\frac{I_c}{I} = \left[\frac{\frac{E_c A}{E} - 2\frac{A_w}{3}}{2A_f + A_w/3}\right]E \qquad \text{و} \quad F_{cr} = \frac{\pi^2 E'}{(kL/r)^2}$$



$$F_{cr} = F_y\left[1 - \frac{F_y}{4\pi^2 E}\left(\frac{kL}{r}\right)^2\right] \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$$